

# Algorithmes holographiques

Yann Strozecki    Sous la direction d'Arnaud Durand

Equipe de Logique Mathématique, Paris 7

25 décembre 2007

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ . On étudie certains problèmes à la frontière des classes  $FP$  et  $\#P$  grâce à une nouvelle technique de réduction.

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ . On étudie certains problèmes à la frontière des classes  $FP$  et  $\#P$  grâce à une nouvelle technique de réduction.

- Le problème caractéristique complet de  $\#P$  est le comptage des couplages parfaits dans un graphe biparti

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ . On étudie certains problèmes à la frontière des classes  $FP$  et  $\#P$  grâce à une nouvelle technique de réduction.

- Le problème caractéristique complet de  $\#P$  est le comptage des couplages parfaits dans un graphe biparti
- Pourtant décider si un graphe biparti admet un couplage parfait est dans  $P$

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ . On étudie certains problèmes à la frontière des classes  $FP$  et  $\#P$  grâce à une nouvelle technique de réduction.

- Le problème caractéristique complet de  $\#P$  est le comptage des couplages parfaits dans un graphe biparti
- Pourtant décider si un graphe biparti admet un couplage parfait est dans  $P$
- Grâce aux algorithmes holographiques de Valiant on peut montrer que PI-Rtw-Mon-3CNF est facile à calculer modulo 7 mais pas modulo 2.

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

### Définition (PerfMatch)

Soient  $G$  un graphe pondéré par  $w_{i,j}$  poids de l'arête  $(i,j)$  et  $\mathcal{C}$  l'ensemble de ses couplages parfaits.

$$\text{PerfMatch}(G) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \prod_{(i,j) \in \mathcal{C}} w_{i,j}$$

Ce polynôme généralise le comptage des couplages parfaits, chaque couplage contribuant pour un poids dépendant de ses arêtes.

### Définition (MatchSum)

Soit  $G$  un graphe doublement pondéré, c'est à dire avec aussi des poids  $\lambda_i$  sur les sommets. Si  $A$  est un ensemble de sommet de  $G$ ,  $G[A]$  est le graphe induit par l'oubli des sommets de  $A$ . Le MatchSum est le polynôme en les  $\lambda_i$  suivant :

$$\text{MatchSum}(G) = \sum_A \left( \prod_{i \in A} \lambda_i \right) \text{PerfMatch}(G[A])$$

Ce polynôme généralise le comptage de tous les couplages d'un graphe.

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## Théorème

*Le PerfMatch et le MatchSum avec des poids entiers positifs sur les arêtes sont des problèmes  $\#P$ -complet.*

### Théorème

*Le PerfMatch et le MatchSum avec des poids entiers positifs sur les arêtes sont des problèmes  $\#P$ -complet.*

### Théorème

*Les problèmes de calculer le PerfMatch et le MatchSum sur un corps  $\mathbb{K}$  sont dans  $\mathbb{K} - \#P$ .*

## Théorème

*Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP.*

## Théorème

*Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP.*

Ce très beau résultat de Kasteleyn va être une clé de la méthode que je présente.

## Théorème

*Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans  $FP$ .*

Ce très beau résultat de Kasteleyn va être une clé de la méthode que je présente.

On peut aussi remarquer que calculer le PerfMatch modulo 2 revient à calculer un déterminant ce qui en fait un problème de  $FP$ .

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , noté  $E_1 \otimes E_2$ , est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme  $(x_1, x_2)$  avec  $x_i \in E_i$ , aussi notés  $x_1 \otimes x_2$ . Ils vérifient les propriétés suivantes :

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , noté  $E_1 \otimes E_2$ , est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme  $(x_1, x_2)$  avec  $x_i \in E_i$ , aussi notés  $x_1 \otimes x_2$ . Ils vérifient les propriétés suivantes :

$$\textcircled{1} \quad x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$$

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , noté  $E_1 \otimes E_2$ , est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme  $(x_1, x_2)$  avec  $x_i \in E_i$ , aussi notés  $x_1 \otimes x_2$ . Ils vérifient les propriétés suivantes :

$$\textcircled{1} \quad x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$$

$$\textcircled{2} \quad x_1 \otimes x_2 + x'_1 \otimes x_2 = (x_1 + x'_1) \otimes x_2$$

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , noté  $E_1 \otimes E_2$ , est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme  $(x_1, x_2)$  avec  $x_i \in E_i$ , aussi notés  $x_1 \otimes x_2$ . Ils vérifient les propriétés suivantes :

- 1  $x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$
- 2  $x_1 \otimes x_2 + x'_1 \otimes x_2 = (x_1 + x'_1) \otimes x_2$
- 3  $a(x_1 \otimes x_2) = ax_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes ax_2$

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , noté  $E_1 \otimes E_2$ , est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme  $(x_1, x_2)$  avec  $x_i \in E_i$ , aussi notés  $x_1 \otimes x_2$ . Ils vérifient les propriétés suivantes :

- 1  $x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$
- 2  $x_1 \otimes x_2 + x'_1 \otimes x_2 = (x_1 + x'_1) \otimes x_2$
- 3  $a(x_1 \otimes x_2) = ax_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes ax_2$

### Remarque

Si  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_m)$  sont respectivement des bases des espaces vectoriels  $A$  et  $B$  alors l'ensemble des  $a_i \otimes b_j$ ,  $(i, j) \in [1, \dots, n] \times [1, \dots, m]$  est une base de  $A \otimes B$ .

Supposons que les espaces vectoriels, sont de la forme  $\mathcal{M}_{n,k}$ . On a alors un isomorphisme naturel de  $\mathcal{M}_{n,k} \otimes \mathcal{M}_{n',k'}$  vers  $\mathcal{M}_{n.n',k.k'}$ .

Supposons que les espaces vectoriels, sont de la forme  $\mathcal{M}_{n,k}$ . On a alors un isomorphisme naturel de  $\mathcal{M}_{n,k} \otimes \mathcal{M}_{n',k'}$  vers  $\mathcal{M}_{n.n',k.k'}$ .

### Lemme

*Soient deux vecteurs  $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$  et  $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$  avec pour tout  $i$  des vecteurs  $u_i$  et  $v_i$  de même dimension. Alors*

$$\langle u, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq k} \langle u_i, v_i \rangle.$$

## Définition (Porte de couplage)

Une porte de couplage est un triplet  $(G, I, O)$ , où  $G$  est un graphe  $(V, E)$  et  $I, O$  sont des sous-ensembles disjoints de sommets de  $V$  représentant ses *entrées* et ses *sorties*.

On appelle *porte génératrice*, une porte qui n'a pas d'entrées, et *porte de reconnaissance* une porte qui n'a pas de sorties.

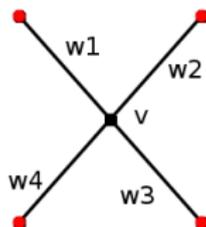


Fig.: Une porte de reconnaissance à 4 entrées

Soit  $f$  la bijection entre les nombres de  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et les sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$  définie par  $x \in f(i)$  ssi le  $x^{\text{ème}}$  bit de  $i$  en binaire est 1 .

Dans une porte de couplage, on suppose les entrées et sorties numérotées de 1 à  $n$  et 1 à  $p$  respectivement, qu'on met en bijection avec  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et  $\{0, \dots, 2^p - 1\}$  par  $f$  et  $f'$  grâce à la remarque précédente.

Soit  $f$  la bijection entre les nombres de  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et les sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$  définie par  $x \in f(i)$  ssi le  $x^{\text{ème}}$  bit de  $i$  en binaire est 1.

Dans une porte de couplage, on suppose les entrées et sorties numérotées de 1 à  $n$  et 1 à  $p$  respectivement, qu'on met en bijection avec  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et  $\{0, \dots, 2^p - 1\}$  par  $f$  et  $f'$  grâce à la remarque précédente.

### Définition (Matrice d'une porte de couplage)

Soit  $(G, I, O)$  une porte de couplage à  $n$  sorties et  $p$  entrées, on note  $M = (m_{i,j})$  la matrice de couplage de cette porte. L'entrée  $m_{i,j}$  de la matrice de couplage est le PerfMatch du sous-graphe induit par  $V \setminus (f(i) \cup f'(j))$ .

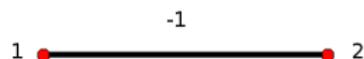


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ .

### Définition (Base)

Une *base* de taille  $n$  est un ensemble de vecteurs indépendants non nuls de dimension  $2^n$ .

Les deux bases les plus fréquemment utilisées seront la base standard  $\mathbf{b}_0 = \{(1, 0), (0, 1)\}$  et la base  $\mathbf{b}_1 = \{(-1, 1), (1, 0)\}$  sur un corps  $\mathbb{K}$  quelconque qui contient alors toujours 0, 1 et  $-1$ .

Soient  $\mathbf{b}$  une base et  $X$  l'ensemble des vecteurs obtenus par  $k$  produits tensoriels des vecteurs de la base  $\mathbf{b} = \{n, p\}$ ,

$$X = \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \mid x_i \in \mathbf{b}, i \leq k\}.$$

- 1 On considère une porte génératrice  $A$  de signature standard  $u$  de taille  $2^k$ ,  $u$  s'écrit de manière unique comme une somme de vecteurs de  $X$ . On nomme  $valG(A, x)$  pour  $x \in X$  le coefficient devant  $x$  dans la décomposition de  $u$  par rapport à  $X$ .
- 2 On considère une porte de reconnaissance  $B$  de signature standard  $u$  de taille  $2^k$ . On note  $valR(B, x)$  pour  $x \in X$  le produit scalaire de  $u$  et de  $x$ .

La signature d'une porte est un vecteur de taille  $2^k$  contenant tous les  $valG(A, x)$  (ou  $valR(B, x)$ ) pour  $x \in X$ . On voit les  $x \in X$  comme des mots de  $\{n, p\}^k$  qu'on ordonne de manière lexicographique en posant par convention  $n < p$ .

La signature d'une porte est un vecteur de taille  $2^k$  contenant tous les  $valG(A, x)$  (ou  $valR(B, x)$ ) pour  $x \in X$ . On voit les  $x \in X$  comme des mots de  $\{n, p\}^k$  qu'on ordonne de manière lexicographique en posant par convention  $n < p$ .

Avec cet ordre la signature standard est égale à la signature dans la base standard, ce qui est satisfaisant, non ?

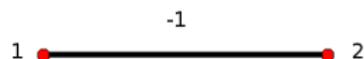


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ .

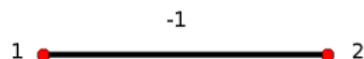


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ . Pour calculer la signature selon la base  $\mathbf{b}_1 = \{n, p\}$  avec  $n = (-1, 1)$  et  $p = (1, 0)$ , on doit calculer  $\mathbf{b}_1^{\otimes 2}$  :

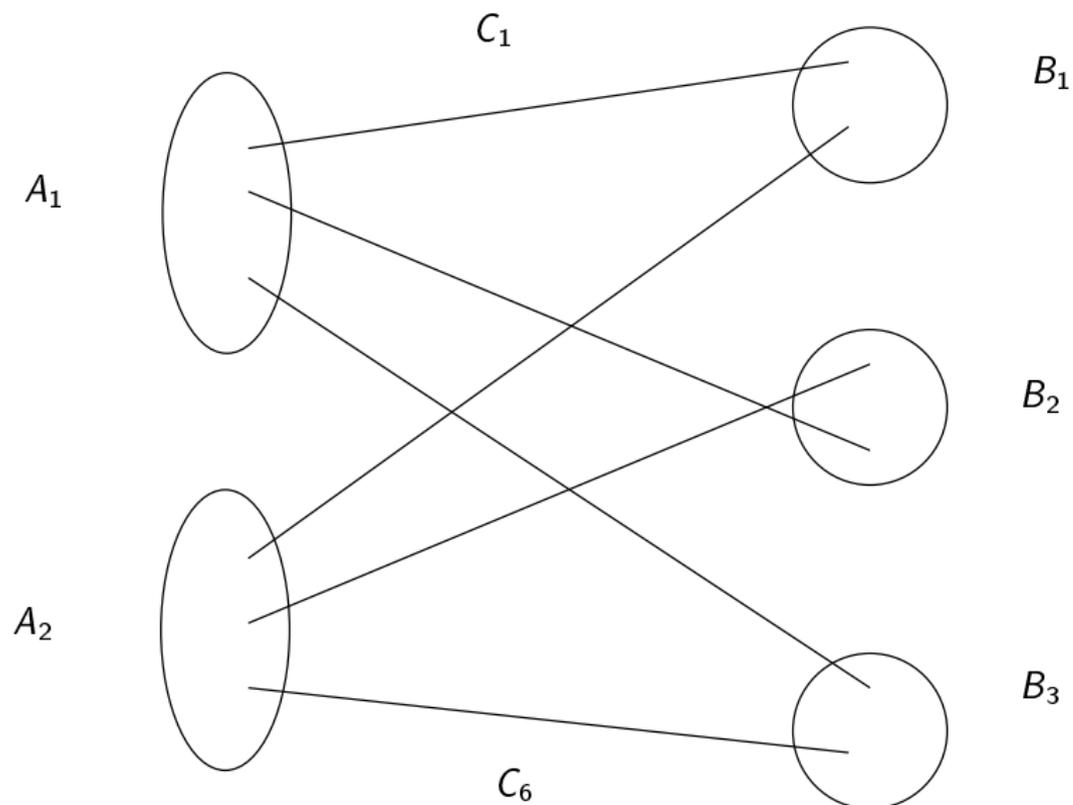
$$\begin{cases} n \otimes n = (1, -1, -1, 1) \\ n \otimes p = (-1, 0, 1, 0) \\ p \otimes n = (-1, 1, 0, 0) \\ p \otimes p = (1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Comme  $u = n \otimes n + n \otimes p + p \otimes n$ , la signature par rapport à  $\mathbf{b}_1$  est  $(1, 1, 1, 0)$ .

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

### Définition (Circuit de couplage)

Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices  $\{A_1, \dots, A_g\}$ , d'un ensemble de portes de reconnaissance  $\{B_1, \dots, B_l\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\{C_1, \dots, C_f\}$  qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.



### Définition (Circuit de couplage)

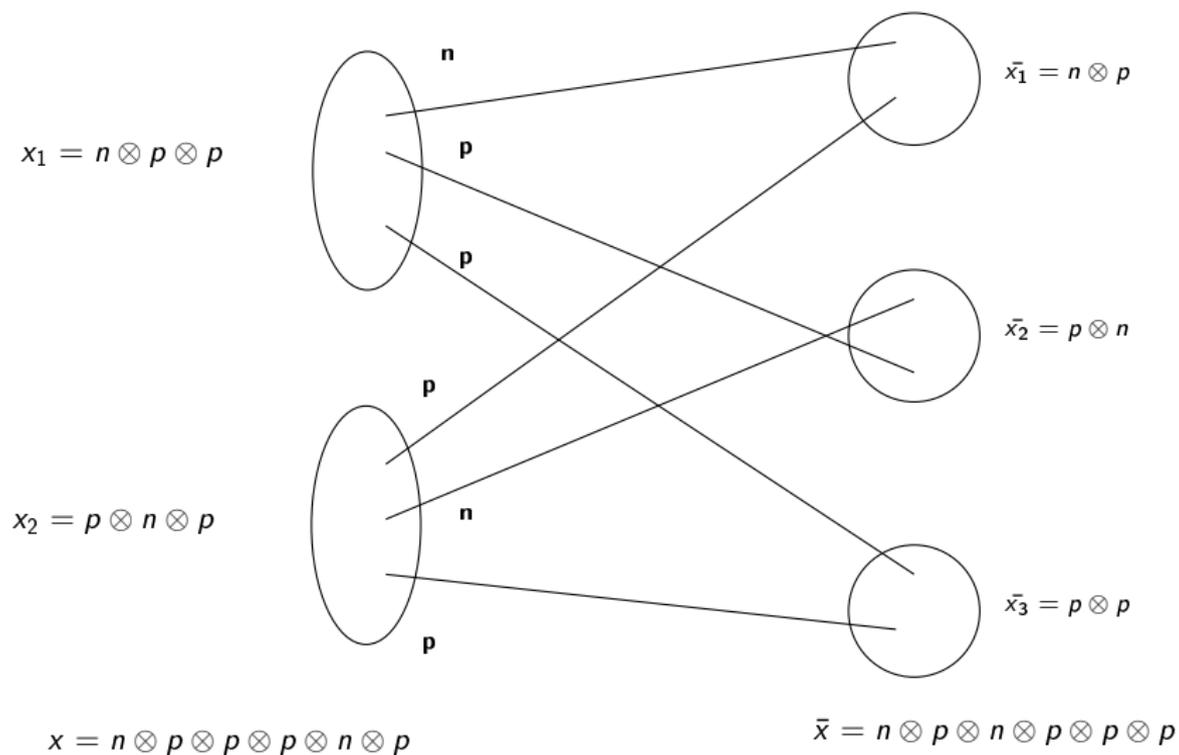
Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices  $\{A_1, \dots, A_g\}$ , d'un ensemble de portes de reconnaissance  $\{B_1, \dots, B_l\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\{C_1, \dots, C_f\}$  qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.

### Définition (Circuit de couplage)

Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices  $\{A_1, \dots, A_g\}$ , d'un ensemble de portes de reconnaissance  $\{B_1, \dots, B_l\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\{C_1, \dots, C_f\}$  qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.

Soit  $\mathbf{b} = \{n, p\}$  une base, on pose  $X = \mathbf{b}^{\otimes f}$ .

Les arêtes entre les porte génératrices et les portes de reconnaissance réalise une bijection entre les  $f$  entrées et les  $f$  sorties. Cela induit une bijection de  $X$  vers  $X$  qui à  $x$  associe  $\bar{x}$ .



## Définition (Holant)

Soit un circuit de couplage  $\Omega = (A, B, C)$  alors le Holant de ce circuit est :

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{x \in \mathbf{b}^{\otimes f}} \left[ \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[ \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

## Définition (Holant)

Soit un circuit de couplage  $\Omega = (A, B, C)$  alors le Holant de ce circuit est :

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{x \in \mathbf{b}^{\otimes f}} \left[ \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[ \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

## Théorème

*Pour tout circuit de couplage  $\Omega$  correspondant à un graphe  $G$ , et toute base  $\mathbf{b}$ ,*

$$\text{Holant}(\Omega) = \text{PerfMatch}(G).$$

## Lemme

*Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.*

## Lemme

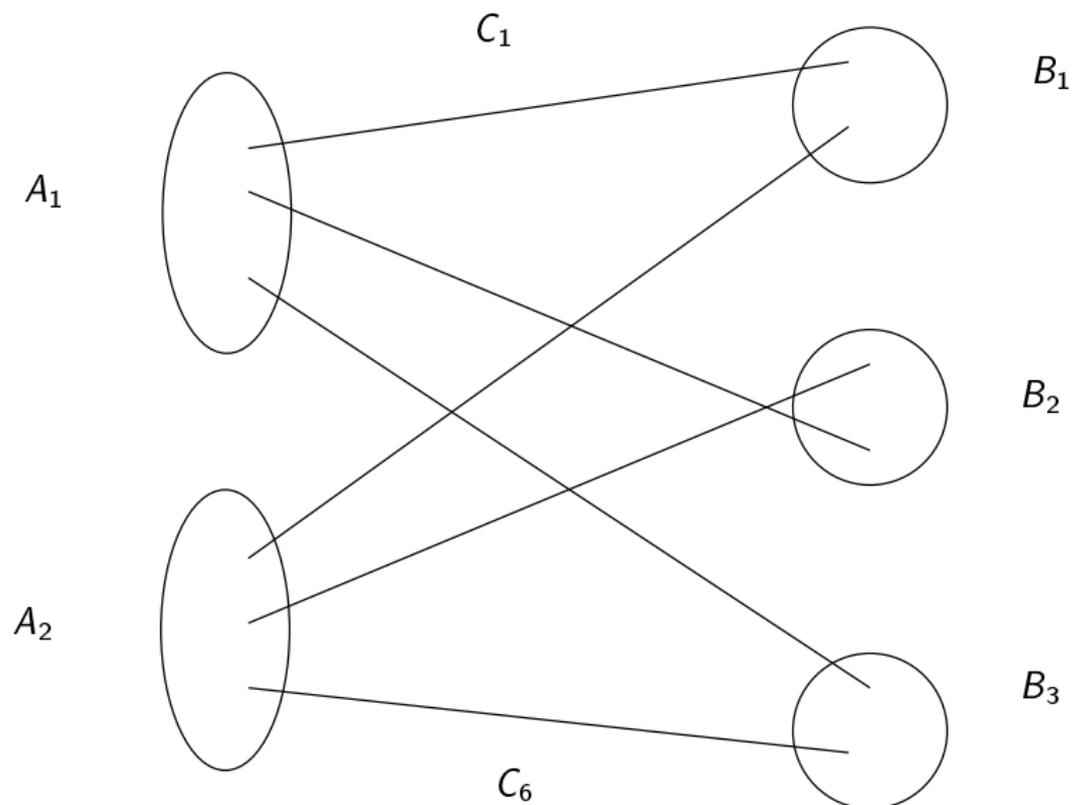
*Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.*

- Un élément  $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_f$  de la base standard représente exactement un sous-ensemble des arêtes  $C_i$ .

## Lemme

*Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.*

- Un élément  $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_f$  de la base standard représente exactement un sous-ensemble des arêtes  $C_i$ .
- $\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$  est exactement le nombre de couplages parfaits contenant les arêtes  $C_i$  sélectionnées par  $x$ .



- Si on a deux portes génératrices  $A_1$  et  $A_2$  de signatures respectives  $u_1$  et  $u_2$ , la signature de la porte de sortie  $A_1 \cup A_2$  en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de  $A_1$  soient avant celles de  $A_2$  est  $u_1 \otimes u_2$ .

- Si on a deux portes génératrices  $A_1$  et  $A_2$  de signatures respectives  $u_1$  et  $u_2$ , la signature de la porte de sortie  $A_1 \cup A_2$  en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de  $A_1$  soient avant celles de  $A_2$  est  $u_1 \otimes u_2$ .
- Donc  $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$  avec  $u_i$  signature standard de  $A_i$ .

- Si on a deux portes génératrices  $A_1$  et  $A_2$  de signatures respectives  $u_1$  et  $u_2$ , la signature de la porte de sortie  $A_1 \cup A_2$  en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de  $A_1$  soient avant celles de  $A_2$  est  $u_1 \otimes u_2$ .
- Donc  $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$  avec  $u_i$  signature standard de  $A_i$ .
- Comme  $u_i = \sum_{x_i \in X_i} \text{val}G(A_i, x_i)x_i$ , par linéarité du produit tensoriel

$$u = \sum_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left( \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \right)$$

- Si on a deux portes génératrices  $A_1$  et  $A_2$  de signatures respectives  $u_1$  et  $u_2$ , la signature de la porte de sortie  $A_1 \cup A_2$  en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de  $A_1$  soient avant celles de  $A_2$  est  $u_1 \otimes u_2$ .
- Donc  $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$  avec  $u_i$  signature standard de  $A_i$ .
- Comme  $u_i = \sum_{x_i \in X_i} \text{val}G(A_i, x_i)x_i$ , par linéarité du produit tensoriel

$$u = \sum_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left( \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \right)$$

- $\bar{x} = \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l$  et  $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_l$ . Par le Lemme 1 on a l'égalité  $\langle \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l, v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \langle \bar{x}_i, v_i \rangle$ .

- Si on a deux portes génératrices  $A_1$  et  $A_2$  de signatures respectives  $u_1$  et  $u_2$ , la signature de la porte de sortie  $A_1 \cup A_2$  en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de  $A_1$  soient avant celles de  $A_2$  est  $u_1 \otimes u_2$ .
- Donc  $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$  avec  $u_i$  signature standard de  $A_i$ .
- Comme  $u_i = \sum_{x_i \in X_i} \text{val}G(A_i, x_i)x_i$ , par linéarité du produit tensoriel

$$u = \sum_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left( \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \right)$$

- $\bar{x} = \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l$  et  $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_l$ . Par le Lemme 1 on a l'égalité  $\langle \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l, v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \langle \bar{x}_i, v_i \rangle$ .
- Puis par définition de la signature d'une porte de reconnaissance  $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 < i < l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$ .

- On en était à  $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$

- On en était à  $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$
- Par linéarité du produit scalaire

$$\langle \bar{u}, v \rangle = \sum_{x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left[ \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[ \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

- On en était à  $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$
- Par linéarité du produit scalaire

$$\langle \bar{u}, v \rangle = \sum_{x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left[ \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[ \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

- $u$  est la signature standard de toutes les portes génératrices et  $v$  celle de toutes les portes de reconnaissance,  $\langle \bar{u}, v \rangle$  est le PerfMatch du graphe.

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## Pl-X-matching

**Entrée** : Un graphe pondéré biparti planaire  $G = (V, E, W)$  en entrée,  $V$  étant partitionné en  $V_1$  et  $V_2$ , tel que tous les sommets de  $V_1$  soient de degré au plus 2.

**Sortie** : La somme des poids des couplages de toutes tailles, où le poids d'un couplage est le produit des poids des arêtes du couplage et de, pour tout sommet non saturé de  $V_2$ ,  $-(w_1 + \dots + w_k)$  somme des poids des arêtes arrivant en ce sommet.

## Pl-X-matching

**Entrée** : Un graphe pondéré biparti planaire  $G = (V, E, W)$  en entrée,  $V$  étant partitionné en  $V_1$  et  $V_2$ , tel que tous les sommets de  $V_1$  soient de degré au plus 2.

**Sortie** : La somme des poids des couplages de toutes tailles, où le poids d'un couplage est le produit des poids des arêtes du couplage et de, pour tout sommet non saturé de  $V_2$ ,  $-(w_1 + \dots + w_k)$  somme des poids des arêtes arrivant en ce sommet.

## Théorème

Pl-X-matching a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire  $\text{Pl-X-matching} \in \text{FP}$ .

On peut réaliser la signature  $(1, 1, 1, 0)$  selon la base  $\mathbf{b}_1$ .

On peut réaliser la signature  $(1, 1, 1, 0)$  selon la base  $\mathbf{b}_1$ .

### Lemme

*Pour tout  $k$  et tout ensemble de poids  $w_1, \dots, w_k$  il existe une porte de reconnaissance à  $k$  entrées  $B$  telle que sur l'entrée  $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}_1^{\otimes k}$ , la valeur de  $\text{val}R(B, x)$  est :*

- 1  $-(w_1 + \dots + w_k)$  si  $x_1 = \dots = x_k = n$
- 2  $w_i$  si  $x_i = p$  et pour tout  $j \neq i$   $x_j = n$
- 3 0 pour le reste des cas

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## PI-Node-Bipartition

**Entrée** : Un graphe planaire de degré au plus 3.

**Sortie** : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

## PI-Node-Bipartition

**Entrée** : Un graphe planaire de degré au plus 3.

**Sortie** : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

### Théorème

PI-Node-Bipartition a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire PI-Node-Bipartition est dans FP.

### Définition (Signature symétrique)

Si  $\text{val}G(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ ,  $x_i \in \{n, p\}$  ne dépend que du nombre de  $n$  et  $p$  et pas de leur positions dans  $x$ , on dit que la signature de  $E$  selon la base  $\{n, p\}$  est symétrique. On note ces signatures  $[S_0, \dots, S_k]$ .

### Définition (Signature symétrique)

Si  $valG(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ ,  $x_i \in \{n, p\}$  ne dépend que du nombre de  $n$  et  $p$  et pas de leur positions dans  $x$ , on dit que la signature de  $E$  selon la base  $\{n, p\}$  est symétrique. On note ces signatures  $[S_0, \dots, S_k]$ .

On travaille ici dans la base  $\mathbf{b}_3 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ . On réalise la signature  $[0, 1, 0]$  pour une porte génératrice et les signatures  $[x, 1, x]$  et  $[x, 1, 1, x]$  pour des portes de reconnaissances.

### Définition (Signature symétrique)

Si  $\text{val}G(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ ,  $x_i \in \{n, p\}$  ne dépend que du nombre de  $n$  et  $p$  et pas de leur positions dans  $x$ , on dit que la signature de  $E$  selon la base  $\{n, p\}$  est symétrique. On note ces signatures  $[S_0, \dots, S_k]$ .

On travaille ici dans la base  $\mathbf{b}_3 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ . On réalise la signature  $[0, 1, 0]$  pour une porte génératrice et les signatures  $[x, 1, x]$  et  $[x, 1, 1, x]$  pour des portes de reconnaissances.

Le calcul du Holant donne un polynôme en  $x$  dont le degré est la valeur recherchée. Il ne reste plus qu'à calculer ce polynôme par interpolation.

Mais qu'est-ce qu'un algorithme holographique, une réduction holographique ?

**Mais qu'est-ce qu'un algorithme holographique, une réduction holographique ?**

C'est ce qu'on vient de voir !

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## # PI-Rtw-Mon-3CNF

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

## # PI-Rtw-Mon-3CNF

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

## Théorème

$\oplus$ PI-Rtw-Mon-3CNF est  $\oplus P$ -complet.

## # PI-Rtw-Mon-3CNF

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

### Théorème

$\oplus$ PI-Rtw-Mon-3CNF est  $\oplus P$ -complet.

### Théorème

#<sub>7</sub>PI-Rtw-Mon-3CNF a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire #<sub>7</sub>PI-Rtw-Mon-3CNF  $\in$  FP.

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - **Deux beaux résultats de Cai**
  - Quelques idées pour la suite

## Théorème

*Soient  $G_1, \dots, G_s$  des signatures de générateurs et  $R_1, \dots, R_t$  des signatures de reconnaisseurs simultanément réalisables dans la même base  $\mathbf{b}$  de taille quelconque. Si toutes les signatures des générateurs ne sont pas dégénérées alors il existe une base  $\hat{\mathbf{b}}$  de taille 1 facilement calculable à partir de  $\mathbf{b}$  dans laquelle toutes ces signatures sont simultanément réalisables.*

## Théorème

*Soient  $G_1, \dots, G_s$  des signatures de générateurs et  $R_1, \dots, R_t$  des signatures de reconnaissseurs simultanément réalisables dans la même base  $\mathbf{b}$  de taille quelconque. Si toutes les signatures des générateurs ne sont pas dégénérées alors il existe une base  $\hat{\mathbf{b}}$  de taille 1 facilement calculable à partir de  $\mathbf{b}$  dans laquelle toutes ces signatures sont simultanément réalisables.*

## Théorème

*On peut décider en temps polynômial si un nombre quelconque de signatures symétriques sont simultanément réalisables.*

- 1 Deux polynômes de graphe
  - Présentation
  - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
  - Définitions
  - Exemple
  - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
  - Pl-X-Matching
  - Pl-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
  - Un autre algorithme holographique
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.
- 5 Trouver un problème de parité qu'on peut résoudre en temps polynômial grâce à une réduction vers le PerfMatch d'un graphe biparti.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.
- 5 Trouver un problème de parité qu'on peut résoudre en temps polynômial grâce à une réduction vers le PerfMatch d'un graphe biparti.
- 6 Trouver une manière de décrire les "bons" problèmes cibles.



Leslie G. Valiant.

Quantum computers that can be simulated classically in polynomial time.

In *STOC*, pages 114–123, 2001.



Leslie G. Valiant.

Holographic algorithms.

*Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, (099), 2005.



Jin yi Cai and Pinyan Lu.

Bases collapse in holographic algorithms.

In *IEEE Conference on Computational Complexity*, pages 292–304, 2007.



Jin yi Cai and Pinyan Lu.

Holographic algorithms : from art to science.

In *STOC*, pages 401–410, 2007.