Rapport de stage: Réductions dans le modèle $(\mathbb{R}, +, -, \leq, 0, 1)$

Yann Strozecki
Maître de stage : Peter Bürgisser

26 septembre 2007

1. Définitions
   - Cadre de travail : le modèle BSS
   - Les classes de complexité
   - Les réductions
2. Des résultats de complétude
   - Résultats préliminaires et idées
   - Théorèmes importants
3. Le problème du voyageur de commerce
   - Intérêt
   - Difficultés
   - Les problèmes complets
   - Complétude de *TSP* ?
   - Avec les réels non standard
4. Conclusion

Une machine BSS est constituée d'un ruban semi-infini à valeur réelle, et d'un graphe orienté connexe constitué par :

- des sommets de calcul, étiquetés par une opération élémentaire du modèle
- des sommets de tests étiquetés par une relation de comparaison
- des sommets de déplacements étiquetés par gauche ou droite

La machine fonctionne en parcourant le graphe et en exécutant l'instruction se trouvant sur le sommet.

Si la machine travaille sur $\{0, 1\}$, elle est équivalente à une machine de Turing.

Le temps d'exécution est toujours la mesure de la complexité, on retrouve donc les mêmes classes de complexités que dans le cas classique.

- P : Problèmes décidables en temps polynômial.
- NP : On dit qu'un problème Π est dans NP, si $x \in \Pi \Leftrightarrow \exists y, (x, y) \in L$ avec $L \in P$ et y de taille polynômiale en x.
- On peut encore citer PH ou $PSPACE$ ...
- D pour digital.

Counting classes : On dit qu'une fonction f est dans $\sharp P$ si elle peut se définir comme $f(x) = |\{y|(x, y) \in L\}|$ où y est polynômial en $|x|$ et $L \in P$.

Il y a deux types de réduction :

- Réduction polynômiale : Soient deux problèmes Π et Π', on dit que Π se réduit polynômialement à Π' s'il existe une fonction f calculable en temps polynômial telle que $x \in \Pi \Leftrightarrow f(x) \in \Pi'$.
- Réduction Turing : Soient deux problèmes Π et Π', on dit que Π se réduit Turing à Π' s'il existe une machine polynômiale, qui décide Π avec oracle Π'.

On va étudier la complétude de problèmes pour ces deux réductions.

Théorème

$DNP_{add} = NP_{add}$

On démontre ce résultat en utilisant une propriété des systèmes linéaires qui permet de remplacer un réel par un 'petit' rationnel.

L'autre idée importante est le découpage de $\mathbb{R}^n$ en face.
Ces faces sont définies par des polynômes linéaires de coefficient rationnel.
Le but est de pouvoir confondre un point de $\mathbb{R}^n$ avec la face à laquelle il appartient.

Théorème

$NP_{add} \subseteq P_{add}^{NP}$, c'est à dire que tous les problèmes NP (classiques) complets pour Turing réduction sont NP_{add} complets pour Turing réduction.

Théorème

$FP_{add}^{\sharp P_{add}} = FP_{add}^{D\sharp P_{add}} = FP_{add}^{\sharp P}$

Pour démontrer ces deux résultats on utilise les remarques précédentes et notament on arrive à caractériser une face par un rationnel petit.

- Il n'existe pas de réduction spécifique pour la plupart des problèmes connus. De plus on ne sait rien sur leur complétude éventuelle pour réduction polynômiale.
- Il existe quelques résultats sur des problèmes géométriques, pas sur les problèmes de nature combinatoire.
- Quelle est la relation entre $\sharp P_{add}$ et $D\sharp P_{add}$?
- Mon sujet d'étude : $TSP/LTSP/LTSP'$ et leurs versions qui comptent !

- Problèmes creux : conjecture qui empêcherait les problèmes classiques d'être complets pour réduction polynômiale.
- Une réduction pour un problème qui compte fournit celle pour le problème de décision.
- $\sharp 2SAT$ est Turing complet, mais pas complet pour réduction polynômiale.

- *BCSAT* : la satisfaction d'un circuit par une entrée booléenne.
- *BIP*(Boolean Inequality Problem) : Etant donné un système d'équations et d'inéquations linéaires sans constante, dont les coefficients sont réels, existe-il une affectation booléenne des variables qui satisfait le système ?
  On obtient la complétude du problème *BIP* pour réduction polynômiale ainsi que la complétude du problème qui compte en simulant le fonctionnement d'une machine BSS.
- $LTSP'$ la première variante du voyageur de commerce complète pour réduction polynômiale

Pourquoi n'arrive-t-on pas à démontrer la complétude de TSP ? Les difficultés sont :

- passer d'une condition globale à locale
- infériorité stricte dans les réels

Même si on se permet des réductions Turing le problème est difficile.

Les machines BSS peuvent fonctionner sur les réels non-standards $\tilde{\mathbb{R}}$.
Cela revient à introduire dans $\mathbb{R}$ une constante c plus petite que tout réel positif.
Tous les démonstrations précédentes fonctionnent, si on considère les problèmes étendus à $\tilde{\mathbb{R}}$.

$$\forall j, \sum_i \lambda_{i,j} x_i < 0 \leftrightarrow \forall j, \sum_i \lambda_{i,j} x_i \leq c$$

Cette propriété nous donne la complétude pour réduction polynômiale de $LTSP_{\tilde{\mathbb{R}}}$ dans ce modèle.

- progresser par étapes intermédiaires : réduire LTSP à TSP et LTSP' à LTSP.
- trouver des réductions intelligentes, de type Turing avec un nombre d'appel à l'oracle borné logarithmiquement ou par une constante.
- trouver le rapport entre $D\sharp P$ et $\sharp P$