

# Algorithmes holographiques

Yann Strozecki    Sous la direction d'Arnaud Durand

Equipe de Logique Mathématique, Paris 7

19 mars 2008

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ .

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ .

- On a un prédicat  $A(x, y)$  avec  $|y| < p(|x|)$  pour un certain polynôme  $p$ , décidable en temps polynômial

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ .

- On a un prédicat  $A(x, y)$  avec  $|y| < p(|x|)$  pour un certain polynôme  $p$ , décidable en temps polynômial
- L'ensemble des problèmes qu'on peut écrire  $\exists y, A(x, y)$  est la classe  $NP$

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe  $\#P$ .

- On a un prédicat  $A(x, y)$  avec  $|y| < p(|x|)$  pour un certain polynôme  $p$ , décidable en temps polynômial
- L'ensemble des problèmes qu'on peut écrire  $\exists y, A(x, y)$  est la classe  $NP$
- La fonction qui à un  $x$  donné associe  $\#\{y \mid A(x, y)\}$  est notée  $\#A$  et l'ensemble de ces fonctions est la classe  $\#P$

- Le problème  $\#$  SAT est bien sûr complet pour la classe  $\#P$  par réduction parcimonieuse

- Le problème  $\#$  SAT est bien sûr complet pour la classe  $\#P$  par réduction parcimonieuse
- Si on se permet des réductions de Turing on obtient des problèmes complets comme  $\#$  Bip-PerfMatch, c'est à dire compter les couplages parfaits dans un graphe biparti alors que décider l'existence d'un tel couplage se fait en temps polynômial

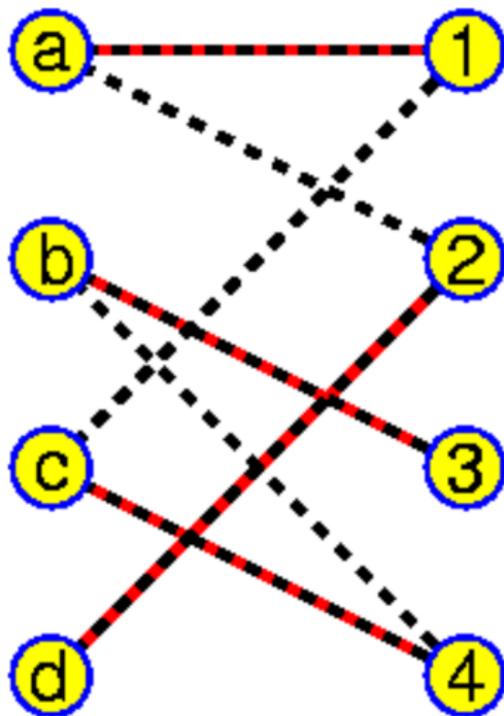


Fig.: Un exemple de couplage parfait

- Le problème  $\#$  SAT est bien sûr complet pour la classe  $\#P$  par réduction parcimonieuse
- Si on se permet des réductions de Turing on obtient des problèmes complets comme  $\#$  Bip-PerfMatch, c'est à dire compter les couplages parfaits dans un graphe biparti alors que décider l'existence d'un tel couplage se fait en temps polynômial
- Le Permanent est aussi  $\#P$  complet

- Le problème  $\#$  SAT est bien sûr complet pour la classe  $\#P$  par réduction parcimonieuse
- Si on se permet des réductions de Turing on obtient des problèmes complets comme  $\#$  Bip-PerfMatch, c'est à dire compter les couplages parfaits dans un graphe biparti alors que décider l'existence d'un tel couplage se fait en temps polynômial
- Le Permanent est aussi  $\#P$  complet
- La classe  $\#P$  est en fait très grosse car elle contient toute la hiérarchie polynômiale  $PH$  (théorème de Toda)

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

Les algorithmes holographiques vont permettre de montrer que certains problèmes qui ont l'air ou sont proches de problèmes difficiles dans  $\#P$ , sont en fait dans  $FP$ .

Les algorithmes holographiques vont permettre de montrer que certains problèmes qui ont l'air ou sont proches de problèmes difficiles dans  $\#P$ , sont en fait dans  $FP$ .

- PI-Node-Bipartition

**Entrée** : Un graphe planaire de degré au plus 3.

**Sortie** : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

Les algorithmes holographiques vont permettre de montrer que certains problèmes qui ont l'air ou sont proches de problèmes difficiles dans  $\#P$ , sont en fait dans  $FP$ .

- **PI-Node-Bipartition**

**Entrée** : Un graphe planaire de degré au plus 3.

**Sortie** : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

- **$\#$  PI-Rtw-Mon-3CNF**

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

La méthode, comme pour les algorithmes quantiques, repose sur des superpositions exponentielles de calcul mais ne nécessite pas d'ordinateur quantique.

- 1 On encode des bouts de calcul par des couplages parfaits
- 2 Par des méthodes algébriques on combine tout cela pour simuler un problème
- 3 On s'assure qu'on a créé un objet planaire afin de pouvoir calculer en temps polynômial

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

### Définition (PerfMatch)

Soient  $G$  un graphe pondéré par  $w_{i,j}$  poids de l'arête  $(i,j)$  et  $\mathcal{C}$  l'ensemble de ses couplages parfaits.

$$\text{PerfMatch}(G) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \prod_{(i,j) \in \mathcal{C}} w_{i,j}$$

Ce polynôme généralise le comptage des couplages parfaits, chaque couplage contribuant pour un poids dépendant de ses arêtes.

### Définition (MatchSum)

Soit  $G$  un graphe doublement pondéré, c'est à dire avec aussi des poids  $\lambda_i$  sur les sommets. Si  $A$  est un ensemble de sommet de  $G$ ,  $G[A]$  est le graphe induit par l'oubli des sommets de  $A$ . Le MatchSum est le polynôme en les  $\lambda_i$  suivant :

$$\text{MatchSum}(G) = \sum_A \left( \prod_{i \in A} \lambda_i \right) \text{PerfMatch}(G[A])$$

Ce polynôme généralise le comptage de tous les couplages d'un graphe.

## Théorème

*Le PerfMatch et le MatchSum avec des poids entiers positifs sur les arêtes sont des problèmes  $\#P$ -complet.*

### Théorème

*Le PerfMatch et le MatchSum avec des poids entiers positifs sur les arêtes sont des problèmes  $\#P$ -complet.*

### Théorème

*Les problèmes de calculer le PerfMatch et le MatchSum sur un corps  $\mathbb{K}$  sont dans  $\mathbb{K} - \#P$ .*

## Théorème

*Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP.*

## Théorème

*Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP.*

Ce très beau résultat de Kasteleyn va être une clé de la méthode que je présente.

## Théorème

*Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans  $FP$ .*

Ce très beau résultat de Kasteleyn va être une clé de la méthode que je présente.

On peut aussi remarquer que calculer le PerfMatch modulo 2 revient à calculer un déterminant ce qui en fait un problème de  $FP$ .

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - **Porte de couplage**
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - Pl-X-Matching
  - Pl-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## Définition (Porte de couplage)

Une porte de couplage est un triplet  $(G, I, O)$ , où  $G$  est un graphe  $(V, E)$  et  $I, O$  sont des sous-ensembles disjoints de sommets de  $V$  représentant ses *entrées* et ses *sorties*.

On appelle *porte génératrice*, une porte qui n'a pas d'entrées, et *porte de reconnaissance* une porte qui n'a pas de sorties.

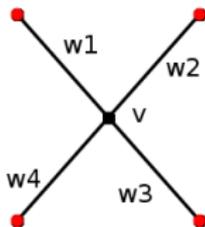


Fig.: Une porte de reconnaissance à 4 entrées

On note  $G_S^R$  le PerfMatch du graphe induit par le retrait de l'ensemble  $R$  d'entrée et  $S$  de sortie à  $G$ .

On note  $G_S^R$  le PerfMatch du graphe induit par le retrait de l'ensemble  $R$  d'entrée et  $S$  de sortie à  $G$ .

Pour  $(G, I, O)$  une porte de couplage, on a  $|I| = n$  et  $|O| = m$ , on note  $f$  et  $f'$  des bijections entre respectivement  $\mathcal{P}(I)$  et  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et  $\mathcal{P}(O)$  et  $\{0, \dots, 2^m - 1\}$ .

### Définition (Matrice d'une porte de couplage)

Soit  $(G, I, O)$  une porte de couplage à  $n$  sorties et  $p$  entrées, on note  $M = (m_{i,j} = G_{f'(j)}^{f(i)})$  la matrice de couplage de cette porte.

On note  $G_S^R$  le PerfMatch du graphe induit par le retrait de l'ensemble  $R$  d'entrée et  $S$  de sortie à  $G$ .

Pour  $(G, I, O)$  une porte de couplage, on a  $|I| = n$  et  $|O| = m$ , on note  $f$  et  $f'$  des bijections entre respectivement  $\mathcal{P}(I)$  et  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et  $\mathcal{P}(O)$  et  $\{0, \dots, 2^m - 1\}$ .

### Définition (Matrice d'une porte de couplage)

Soit  $(G, I, O)$  une porte de couplage à  $n$  sorties et  $p$  entrées, on note  $M = (m_{i,j} = G_{f'(j)}^{f(i)})$  la matrice de couplage de cette porte.

### Remarque

Les matrices de couplages de porte d'entrée ou de sortie sont des vecteurs colonnes et vecteur lignes.

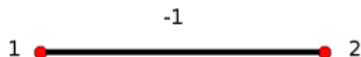


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ .

### Définition (Base)

Une *base* de taille  $n$  est un ensemble de vecteurs indépendants non nuls de dimension  $2^n$ .

Les deux bases les plus fréquemment utilisées seront la base standard  $\mathbf{b}_0 = \{(1, 0), (0, 1)\}$  et la base  $\mathbf{b}_1 = \{(-1, 1), (1, 0)\}$  sur un corps  $\mathbb{K}$  quelconque qui contient alors toujours 0, 1 et  $-1$ .

### Définition (Produit tensoriel de matrice)

Soit  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,k}$  et  $\mathcal{M}_{n',k'}$ , leur produit tensoriel noté  $M \otimes N$  est la matrice  $R$  de  $\mathcal{M}_{n.n',k.k'}$  telle que

$$R_{i.n'+p,j.k'+t} = M_{i,j} \cdot N_{p,t}.$$

### Définition (Produit tensoriel de matrice)

Soit  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,k}$  et  $\mathcal{M}_{n',k'}$ , leur produit tensoriel noté  $M \otimes N$  est la matrice  $R$  de  $\mathcal{M}_{n.n',k.k'}$  telle que

$$R_{i.n'+p,j.k'+t} = M_{i,j} \cdot N_{p,t}.$$

### Remarque

Si  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_m)$  sont respectivement des bases des espaces vectoriels  $A$  et  $B$  alors l'ensemble des  $a_i \otimes b_j$ ,  $(i, j) \in [1, \dots, n] \times [1, \dots, m]$  est une base de  $A \otimes B$ .

Soient  $\mathbf{b}$  une base et  $X$  l'ensemble des vecteurs obtenus par  $k$  produits tensoriels des vecteurs de la base  $\mathbf{b} = \{n, p\}$ ,

$$X = \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \mid x_i \in \mathbf{b}, i \leq k\}.$$

- 1 On considère une porte génératrice  $A$  de signature standard  $u$  de taille  $2^k$ ,  $u$  s'écrit de manière unique comme une somme de vecteurs de  $X$ . On nomme  $valG(A, x)$  pour  $x \in X$  le coefficient devant  $x$  dans la décomposition de  $u$  par rapport à  $X$ .
- 2 On considère une porte de reconnaissance  $B$  de signature standard  $u$  de taille  $2^k$ . On note  $valR(B, x)$  pour  $x \in X$  le produit scalaire de  $u$  et de  $x$ .

La signature d'une porte est un vecteur de taille  $2^k$  contenant tous les  $valG(A, x)$  (ou  $valR(B, x)$ ) pour  $x \in X$ . On voit les  $x \in X$  comme des mots de  $\{n, p\}^k$  qu'on ordonne de manière lexicographique en posant par convention  $n < p$ .

La signature d'une porte est un vecteur de taille  $2^k$  contenant tous les  $valG(A, x)$  (ou  $valR(B, x)$ ) pour  $x \in X$ . On voit les  $x \in X$  comme des mots de  $\{n, p\}^k$  qu'on ordonne de manière lexicographique en posant par convention  $n < p$ .

Avec cet ordre la signature standard est égale à la signature dans la base standard, ce qui est satisfaisant, non ?

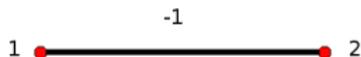


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ .

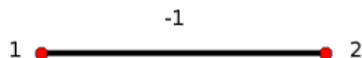


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ . Pour calculer la signature selon la base

$\mathbf{b}_1 = \{n, p\}$  avec  $n = (-1, 1)$  et  $p = (1, 0)$ , on doit calculer  $\mathbf{b}_1^{\otimes 2}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \otimes n = (1, -1, -1, 1) \\ n \otimes p = (-1, 0, 1, 0) \\ p \otimes n = (-1, 1, 0, 0) \\ p \otimes p = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right.$$

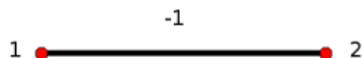


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est  $u = (-1, 0, 0, 1)$ . Pour calculer la signature selon la base  $\mathbf{b}_1 = \{n, p\}$  avec  $n = (-1, 1)$  et  $p = (1, 0)$ , on doit calculer  $\mathbf{b}_1^{\otimes 2}$  :

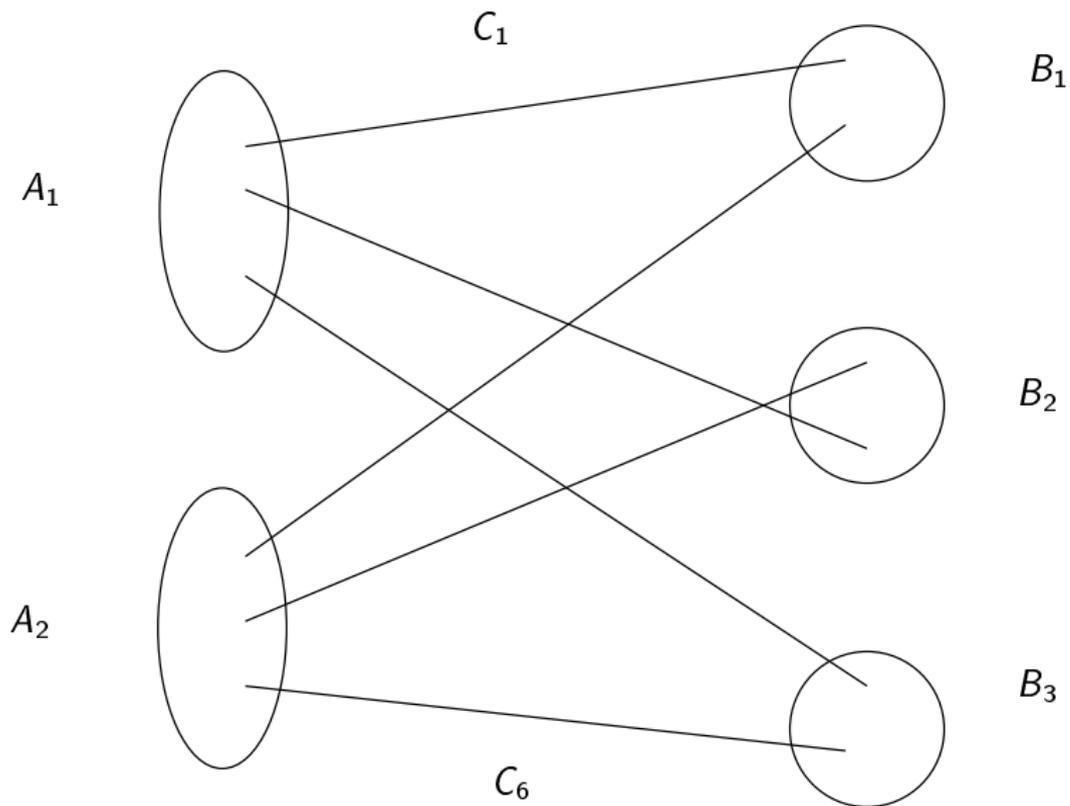
$$\left\{ \begin{array}{l} n \otimes n = (1, -1, -1, 1) \\ n \otimes p = (-1, 0, 1, 0) \\ p \otimes n = (-1, 1, 0, 0) \\ p \otimes p = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right.$$

Comme  $u = n \otimes n + n \otimes p + p \otimes n$ , la signature par rapport à  $\mathbf{b}_1$  est  $(1, 1, 1, 0)$ .

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - **Circuit de couplage**
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

### Définition (Circuit de couplage)

Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices  $\{A_1, \dots, A_g\}$ , d'un ensemble de portes de reconnaissance  $\{B_1, \dots, B_l\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\{C_1, \dots, C_f\}$  qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.

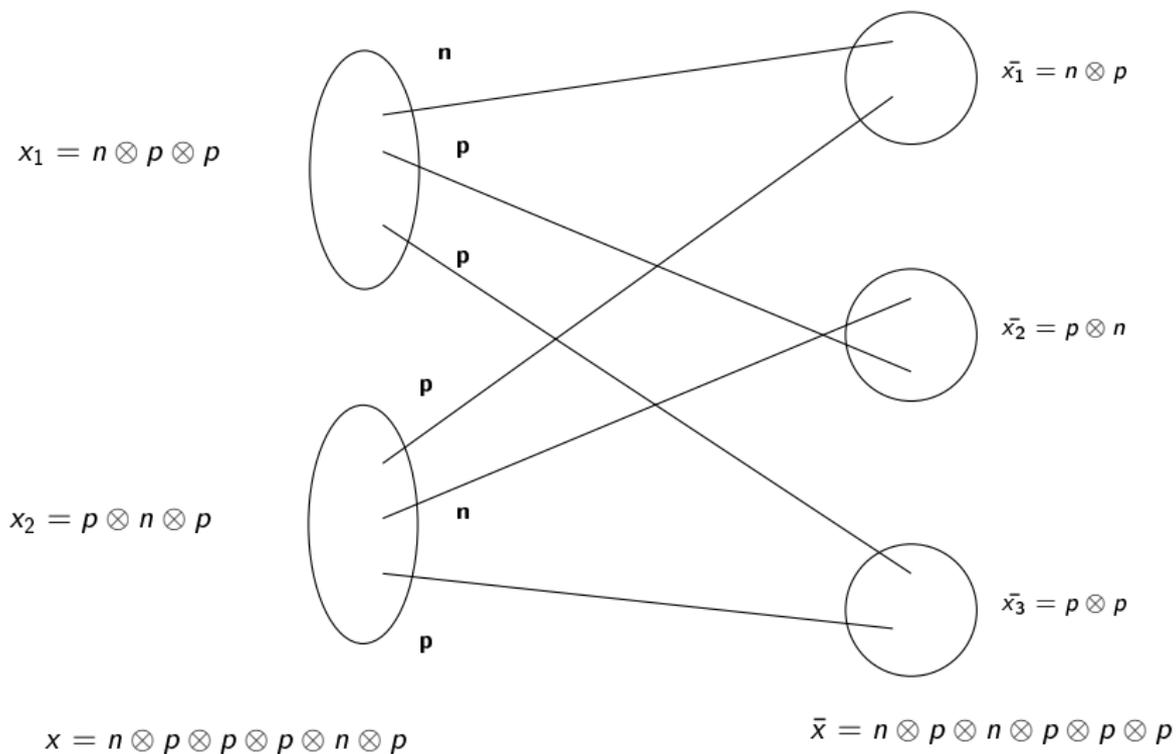


### Définition (Circuit de couplage)

Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices  $\{A_1, \dots, A_g\}$ , d'un ensemble de portes de reconnaissance  $\{B_1, \dots, B_l\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $\{C_1, \dots, C_f\}$  qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.

Soit  $\mathbf{b} = \{n, p\}$  une base, on pose  $X = \mathbf{b}^{\otimes f}$ .

Les arêtes entre les porte génératrices et les portes de reconnaissance réalise une bijection entre les  $f$  entrées et les  $f$  sorties. Cela induit une bijection de  $X$  vers  $X$  qui à  $x$  associe  $\bar{x}$ .



- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - **Holant**
- 3 Applications et développement
  - Pl-X-Matching
  - Pl-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## Définition (Holant)

Soit un circuit de couplage  $\Omega = (A, B, C)$  alors le Holant de ce circuit est :

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{x \in \mathbf{b}^{\otimes f}} \left[ \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[ \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

## Définition (Holant)

Soit un circuit de couplage  $\Omega = (A, B, C)$  alors le Holant de ce circuit est :

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{x \in \mathbf{b}^{\otimes f}} \left[ \prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[ \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

## Théorème

*Pour tout circuit de couplage  $\Omega$  correspondant à un graphe  $G$ , et toute base  $\mathbf{b}$ ,*

$$\text{Holant}(\Omega) = \text{PerfMatch}(G).$$

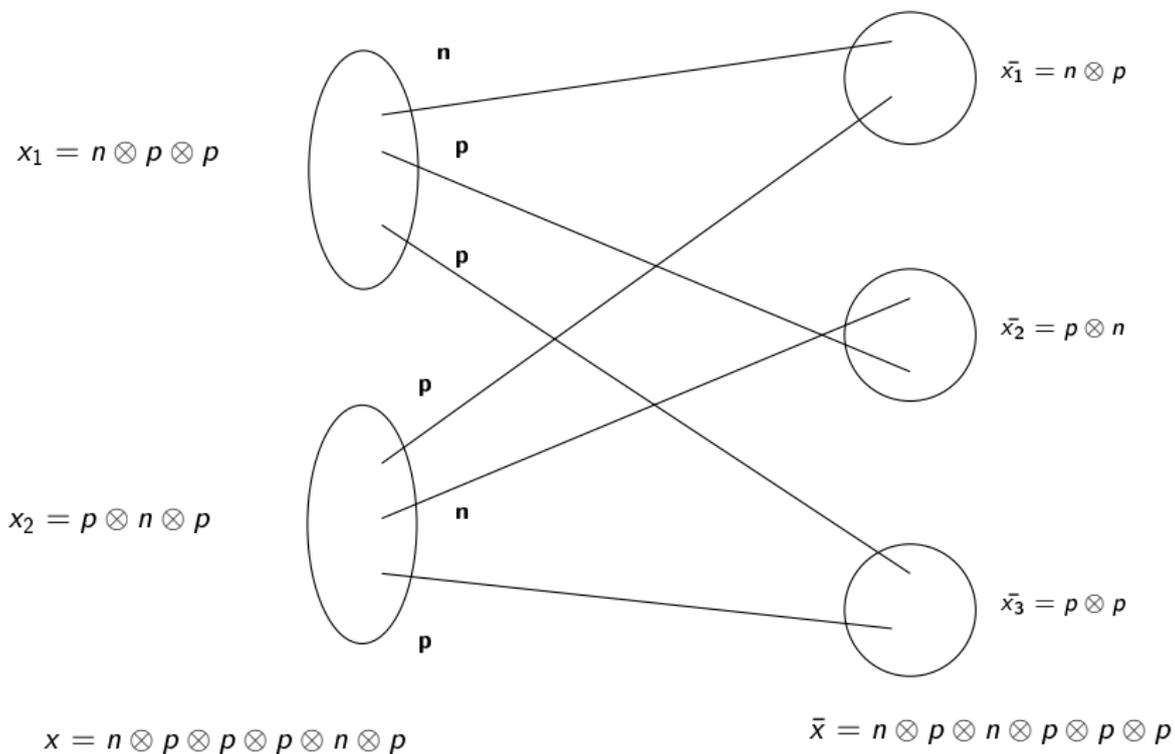
## Lemme

*Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.*

## Lemme

*Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.*

- Un élément  $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_f$  de la base standard représente exactement un sous-ensemble des arêtes  $C_j$ .
- $\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$  est exactement le nombre de couplages parfaits contenant les arêtes  $C_i$  sélectionnées par  $x$ .



Le théorème du Holant se démontre à partir de considérations algébriques et est plus général qu'énoncé.

Le théorème du Holant se démontre à partir de considérations algébriques et est plus général qu'énoncé.

### Remarque

Si on veut calculer le Holant d'un circuit de couplage planaire, on doit calculer le PerfMatch d'un graphe planaire ce qui se fait en temps polynômial.

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - **PI-X-Matching**
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## PI-X-matching

**Entrée :** Un graphe pondéré biparti planaire  $G = (V, E, W)$  en entrée,  $V$  étant partitionné en  $V_1$  et  $V_2$ , tel que tous les sommets de  $V_1$  soient de degré au plus 2.

**Sortie :** La somme des poids des couplages de toutes tailles, où le poids d'un couplage est le produit des poids des arêtes du couplage et de, pour tout sommet non saturé de  $V_2$ ,  $-(w_1 + \dots + w_k)$  somme des poids des arêtes arrivant en ce sommet.

## Pl-X-matching

**Entrée :** Un graphe pondéré biparti planaire  $G = (V, E, W)$  en entrée,  $V$  étant partitionné en  $V_1$  et  $V_2$ , tel que tous les sommets de  $V_1$  soient de degré au plus 2.

**Sortie :** La somme des poids des couplages de toutes tailles, où le poids d'un couplage est le produit des poids des arêtes du couplage et de, pour tout sommet non saturé de  $V_2$ ,  $-(w_1 + \dots + w_k)$  somme des poids des arêtes arrivant en ce sommet.

### Théorème

*Pl-X-matching a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire  $Pl-X-matching \in FP$ .*

On peut réaliser la signature  $(1, 1, 1, 0)$  selon la base  $\mathbf{b}_1 = (n, p)$ .

On peut réaliser la signature  $(1, 1, 1, 0)$  selon la base  $\mathbf{b}_1 = (n, p)$ .

### Lemme

*Pour tout  $k$  et tout ensemble de poids  $w_1, \dots, w_k$  il existe une porte de reconnaissance à  $k$  entrées  $B$  telle que sur l'entrée  $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}_1^{\otimes k}$ , la valeur de  $\text{val}R(B, x)$  est :*

- 1  $-(w_1 + \dots + w_k)$  si  $x_1 = \dots = x_k = n$
- 2  $w_i$  si  $x_i = p$  et pour tout  $j \neq i$   $x_j = n$
- 3 0 pour le reste des cas

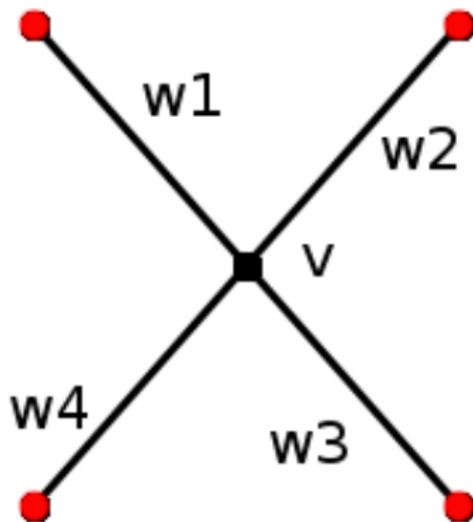


Fig.: La porte réalisant la signature

A chaque  $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}_1^k$  on associe un ensemble d'arête de la manière suivante :

si  $x_i = p$  alors on prends l'arête  $i$  sinon on ne la prends pas.

A chaque  $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}_1^k$  on associe un ensemble d'arête de la manière suivante :

si  $x_i = p$  alors on prends l'arête  $i$  sinon on ne la prends pas.

Le terme associé à  $x$  dans le Holant est le poids du couplage (au sens de X-matching) si cet ensemble est un couplage, 0 sinon.

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - **PI-Node-Bipartition**
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## PI-Node-Bipartition

**Entrée** : Un graphe planaire de degré au plus 3.

**Sortie** : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

PI-Node-Bipartition

**Entrée** : Un graphe planaire de degré au plus 3.

**Sortie** : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

### Théorème

PI-Node-Bipartition a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire PI-Node-Bipartition est dans FP.

### Définition (Signature symétrique)

Si  $valG(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ ,  $x_i \in \{n, p\}$  ne dépend que du nombre de  $n$  et  $p$  et pas de leur positions dans  $x$ , on dit que la signature de  $E$  selon la base  $\{n, p\}$  est symétrique. On note ces signatures  $[S_0, \dots, S_k]$ .

### Définition (Signature symétrique)

Si  $valG(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ ,  $x_i \in \{n, p\}$  ne dépend que du nombre de  $n$  et  $p$  et pas de leur positions dans  $x$ , on dit que la signature de  $E$  selon la base  $\{n, p\}$  est symétrique. On note ces signatures  $[S_0, \dots, S_k]$ .

On travaille ici dans la base  $\mathbf{b}_3 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ . On réalise la signature  $[0, 1, 0]$  pour une porte génératrice et les signatures  $[x, 1, x]$  et  $[x, 1, 1, x]$  pour des portes de reconnaissances.

Dans ce cas les arêtes sont représentées par les portes génératrices et les sommets par des portes de reconnaissance.

Dans ce cas les arêtes sont représentées par les portes génératrices et les sommets par des portes de reconnaissance.

Le calcul du Holant donne un polynôme en  $x$  dont le degré est la valeur recherchée. Il ne reste plus qu'à calculer ce polynôme par interpolation.

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - **Un exemple accidentel**
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

## # PI-Rtw-Mon-3CNF

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

## # PI-Rtw-Mon-3CNF

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

### Théorème

$\oplus$ PI-Rtw-Mon-3CNF est  $\oplus P$ -complet.

## # PI-Rtw-Mon-3CNF

**Entrée** : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

**Sortie** : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

### Théorème

$\oplus$ PI-Rtw-Mon-3CNF est  $\oplus P$ -complet.

### Théorème

#<sub>7</sub>PI-Rtw-Mon-3CNF a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire #<sub>7</sub>PI-Rtw-Mon-3CNF  $\in$  FP.

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - **Deux beaux résultats de Cai**
  - Quelques idées pour la suite

## Théorème

*Soient  $G_1, \dots, G_s$  des signatures de générateurs et  $R_1, \dots, R_t$  des signatures de reconnaisseurs simultanément réalisables dans la même base  $\mathbf{b}$  de taille quelconque. Si toutes les signatures des générateurs ne sont pas dégénérées alors il existe une base  $\hat{\mathbf{b}}$  de taille 1 facilement calculable à partir de  $\mathbf{b}$  dans laquelle toutes ces signatures sont simultanément réalisables.*

## Théorème

*Soient  $G_1, \dots, G_s$  des signatures de générateurs et  $R_1, \dots, R_t$  des signatures de reconnaissseurs simultanément réalisables dans la même base  $\mathbf{b}$  de taille quelconque. Si toutes les signatures des générateurs ne sont pas dégénérées alors il existe une base  $\hat{\mathbf{b}}$  de taille 1 facilement calculable à partir de  $\mathbf{b}$  dans laquelle toutes ces signatures sont simultanément réalisables.*

Intérêt : Quand on veut trouver une signature particulière, il suffit de chercher parmi celles de taille 1

## Théorème

*On peut décider en temps polynômial si un nombre quelconque de signatures symétriques sont simultanément réalisables.*

## Théorème

*On peut décider en temps polynômial si un nombre quelconque de signatures symétriques sont simultanément réalisables.*

**Intérêt** : On peut automatiser la recherche d'une porte réalisant la bonne signature, ce qui retire une étape à l'élaboration d'algorithme holographique.

- 1 Introduction
  - Complexité de comptage
  - Des problèmes plus “faciles”
  - Exemples de problèmes sur des graphes
- 2 Algorithmes holographiques
  - Porte de couplage
  - Circuit de couplage
  - Holant
- 3 Applications et développement
  - PI-X-Matching
  - PI-Node-Bipartition
  - Un exemple accidentel
  - Deux beaux résultats de Cai
  - Quelques idées pour la suite

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Je l'ai fait pour  $\#$  Exact3Cover et un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Je l'ai fait pour  $\#$  Exact3Cover et un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Je l'ai fait pour  $\#$  Exact3Cover et un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.
- 5 Trouver un problème de parité qu'on peut résoudre en temps polynômial grâce à une réduction vers le PerfMatch d'un graphe biparti.

Vous pouvez aller lire mon rapport de DEA sur le sujet pour plus de précisions à l'adresse [www.logique.jussieu.fr/~strozecki](http://www.logique.jussieu.fr/~strozecki)



Leslie G. Valiant.

Quantum computers that can be simulated classically in polynomial time.

In *STOC*, pages 114–123, 2001.



Leslie G. Valiant.

Holographic algorithms.

*Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, (099), 2005.



Jin yi Cai and Pinyan Lu.

Bases collapse in holographic algorithms.

In *IEEE Conference on Computational Complexity*, pages 292–304, 2007.



Jin yi Cai and Pinyan Lu.

Holographic algorithms : from art to science.

In *STOC*, pages 401–410, 2007.